
ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 12: Produits scalaires

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) connaître la **définition de produit scalaire**, ainsi que quelques propriétés ;
- (O.2) **déterminer si une application est un produit scalaire** ;
- (O.3) **calculer des produits scalaires**, vérifier si des éléments sont orthogonaux ;
- (O.4) **calculer des compléments orthogonaux**, et prouver des propriétés fondamentales.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- produit scalaire (abstrait)
- produit scalaire usuel
- norme associée à un produit scalaire
- distance entre deux vecteurs
- vecteur unitaire
- vecteurs orthogonaux
- famille orthogonale
- famille orthonormée
- complément orthogonal

Noyau d'exercices

1.1 Produits scalaires

Exercice 1 (Premières propriétés)

Soient

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^n$. On rappelle que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in \mathbb{R}$$

est le **produit scalaire usuel** de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
- (b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$;
- (c) $(\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Exercice 2 (Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ associé à une matrice inversible)

On rappelle que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ désigne le **produit scalaire usuel** de $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est inversible, alors l'application $(\mid) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$(\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v})$$

pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est un produit scalaire.

Exercice 3 (Produits scalaires sur $\mathbb{P}_n$)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que l'application $(\mid) : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$(p \mid q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$$

pour tous $p, q \in \mathbb{P}_n$ est un produit scalaire.

1.2 Norme, distance et orthogonalité

Exercice 4 (Calculs du produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$)

On considère le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Soient

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, ainsi que

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} \text{ et } \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}.$$

- (c) Calculer la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, et la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$.
- (d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$, pointant dans la même direction que le vecteur original.

Exercice 5 (Famille orthogonale dans $\mathbb{P}_n$)

On considère le produit scalaire $(\mid) : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$(p \mid q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

pour tous $p, q \in \mathbb{P}_n$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{1, t, 1-3t^2\}$ est orthogonale, mais pas orthonormée. Est-ce que $\mathcal{F}$ est libre ?

1.3 Complément orthogonal

Exercice 6 (Complément orthogonal dans $\mathbb{R}^3$)

Soit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble W formé des vecteurs orthogonaux à $\mathbf{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

Exercice 7 (Complément orthogonal)

Soit $(\mid) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel V et soit $S \subseteq V$ une partie non vide. Montrer que

$$S^\perp = \{v \in V : (v|s) = 0 \text{ pour tout } s \in S\} \subseteq V$$

est un sous-espace vectoriel de V , que l'on appelle le sous-espace vectoriel **orthogonal** à S .



Pour compléter la pratique

2.1 Produits scalaires

Exercice 8 (Produit scalaire sur $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$)

Montrer que l'application $(\mid) : \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$$

pour toutes les matrices $A, B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ est un produit scalaire.

2.2 Norme, distance et orthogonalité

Exercice 9 (Famille non orthogonale dans $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$)

On considère le produit scalaire $(\mid) : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$$

pour toutes les matrices $A, B \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Montrez que la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_A, \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_B, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}_C \right\}$$

n'est pas orthogonale. Est-ce que $\mathcal{F}$ est libre ? Calculer $\|A\|^2$, $\|B\|^2$ et $\|C\|^2$.

2.3 Complément orthogonal

Exercice 10 (Dimension du complément orthogonal)

Soient W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\} \subseteq W$ une base de W . Montrer que

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = n.$$